UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI S.M.F.N.

Tesi di Laurea Specialistica in Matematica
Sintesi

Teaching Hyperbolic Geometry

Relatore
Prof. Andrea Bruno

Candidato
Francesca Romana Clementelli

Anno Accademico 2011-2012
Luglio 2012

Parole chiave: Hyperbolic, Geometry, Poincaré Model.
MRcode: 01A20, 01A05, 51M10.

Sintesi

> *" La rivoluzione non euclidea è una rivoluzione scientifica, importante quanto la rivoluzione copernicana in astronomia, la rivoluzione darwiniana in biologia, o quanto la rivoluzione newtoniana o quella del secolo XX in fisica, rivoluzione che è però di gran lunga meno nota perché i suoi effetti sono stati più indiretti: una rivoluzione nata dall'invenzione di un'alternativa alla tradizionale geometria euclidea."*
> Richard Trudeau [7]

In questa tesi si affronta il problema dell'insegnamento delle geometrie non-euclidee - in particolare quella Iperbolica - a studenti di scuola superiore.

E' stata scritta come proposta di un percorso scolastico che offra nozioni di geometria iperbolica a vari livelli di apprendimento.

I Programmi Ministeriali per l'insegnamento della matematica negli indirizzi sperimentali dei licei scientifici prevedono lo studio delle geometrie non-euclidee durante i primi tre anni. Per il momento, l'insegnamento di questo tipo di geometrie non è esplicitamente incluso nei restanti programmi delle scuole medie superiori e neanche in quelli delle scuole medie inferiori.

In un periodo di crisi per l'insegnamento della geometria euclidea sembrerebbe insensato proporre l'educazione della geometria iperbolica a tutto tondo. Tuttavia l'esplorazione della geometria iperbolica, attraverso i suoi modelli euclidei, offre diversi vantaggi per lo studente e - di riflesso -per l'insegnante:

1. Da un punto di vista logico e dimostrativo, in quanto nello sviluppo di dimostrazioni di geometria euclidea, gli studenti spesso confondono

ciò che deve essere dimostrato con ciò che è vero per definizione; molte affermazioni risultano così evidenti da non capire il senso di doverne dare una prova. Essendo meno familiare e meno intuitivo, l'ambiente della geometria iperbolica costringe gli studenti ad incrementare il ragionamento logico, il rigore dimostrativo e le capacità intuitive.

2. Si ha un beneficio sul piano dello studio della geometria euclidea; dal momento che si può studiare la geometria iperbolica attraverso modelli euclidei lo studente è costretto ad approfondire tematiche di geometria euclidea di cui altrimenti non sentirebbe il bisogno.

3. Sul piano culturale lo studio delle geometrie non-euclidee ha l'effetto di chiarire che la geometria non è una teoria nata e morta nella Grecia classica ma che ha avuto un suo processo di sviluppo fino ad oggi: sapere che i più grandi matematici dall'antichità ad oggi, si sono interrogati sulla possibilità che il V Postulato di Euclide non fosse evidentemente vero, anche se a primo impatto così ovvio, accresce la curiosità dello studente sul motivo per cui può essere valido o meno.

Nell'insegnare le nozioni matematiche (definizioni, assiomi, teoremi, simboli o qualsiasi tipo di costruzioni) non bisogna imporle in modo puramente formale e acritico.

Dove è possibile, si devono coinvolgere gli studenti stessi nella costruzione dei nuovi concetti matematici, guidandoli a formulare definizioni, fare congetture, dimostrare la validità o trovare contro-esempi, individuare somiglianze strutturali, ecc..

Un valido aiuto si può avere dalle lavagne elettroniche e dai software. Sono stati sviluppati molti tipi di software interattivi per lo studio delle geometrie non-euclidee ed euclidea. Questi strumenti dovrebbero essere abbastanza popolari nelle scuole, perché attraverso le loro capacità grafiche consentono di visualizzare rapidamente figure geometriche con una precisione che altrimenti richiederebbe l'uso di disegni complessi, di tecnica e di tempo. *GeoGebra*, per esempio, offre la possibilità di fare costruzioni geometriche in modo semplice ed intuitivo: con un giusto percorso didattico si possono verificare le proprietà di oggetti geometrici come le rette, triangoli ecc. sia in ambito euclideo che non-euclideo.

Nel dettaglio la Tesi si sviluppa nel seguente modo:

Nel **primo capitolo** viene esposta un'introduzione storica a partire dalla nascita della geometria euclidea focalizzando l'attenzione sul perché e come, nei secoli successivi, si siano fatti numerosi tentativi di dedurre il V Postulato a partire dai primi quattro, o addirittura di negarlo.

Un postulato caratterizza i termini primitivi e ne esprime alcune proprietà; è una proposizione che si assume vera e rappresenta la base dello studio della geometria. Il fatto che la verità del "Postulato delle parallele" sia garantita dalla sola evidenza, forse non convinse neanche Euclide, che lo utilizzò raramente e solo per le dimostrazioni degli ultimi teoremi del Libro I.

In termini moderni il **V Postulato** può essere espresso come segue:

> *Date due rette parallele tagliate da una trasversale, la somma dei due angoli coniugati interni è pari ad un angolo piatto,*

e nella tradizione didattica è in genere sostituito dall'*Assioma di Playfair*:

> *Data una qualsiasi retta r ed un punto P non appartenente ad essa, è possibile tracciare per P una ed una sola retta parallela alla retta data.*

Nello stesso capitolo si parla di come il tentativo di Girolamo Saccheri abbia introdotto *le tre ipotesi dell'angolo*da cui si sviluppò successivamente lo studio delle geometrie non-euclidee.

Un primo passo per il miglioramento del ragionamento logico-deduttivo è far notare che negare il V Postulato da luogo a due affermazioni distinte, che sono per l'appunto l'ipotesi dell'angolo *ottuso* e l'ipotesi dell'angolo *acuto* di Saccheri o per meglio dire il *Postulato Ellittico* ed il *Postulato Iperbolico*:

- Data una qualsiasi retta r ed un punto P non appartenente ad essa, non esistono rette parallele alla retta data passanti per P,
- Data una qualsiasi retta r ed un punto P non appartenente ad essa, esistono infinite rette parallele alla retta data passanti per P.

Seguono cenni sui successivi tentativi e l'introduzione storica si conclude con la proposta di Hilbert di un *sistema assiomatico corretto* e completo per la geometria.

Una volta analizzata la geometria euclidea come un sistema assiomatico materiale si introduce il *sistema assiomatico formale*. Questo cambiamento ha conseguenze enormi: in un sistema assiomatico materiale, per esempio, può essere descritta solo la geometria reale, il mondo intorno a noi, poiché gli assiomi sono riconosciuti come veri grazie all'*evidenza*. la geometria euclidea è quella più comoda perché si applica alla nostra percezione; le altre geometrie sono controintuitive ma non necessariamente false: evidenza non è sinonimo di verità. Infatti in un sistema assiomatico formale si possono inventare nuove geometrie intuitive e diverse della geometria euclidea, dal momento che non è importante quanto il sistema sia *realistico*, ma quanto sia *coerente*.

Un sistema assiomatico è coerente se non è possibile trarre dal sistema due teoremi contradditori e per stabilire la coerenza di un sistema assiomatico formale se ne fornisce un modello che è l'interpretazione dei termini primitivi in modo tale da far diventare gli assiomi delle frasi *vere*.

Per la geometria Iperbolica si conoscono solo dimostrazioni di coerenza relative ovvero la sua coerenza è ricondotta a quella della geometria euclidea, per esempio, attraverso i modelli di Poicaré; poiché quest'ultima non è mai stata messa in discussione il modello stesso risulta convincente.

Il **secondo capitolo** è la parte più corposa della tesi in cui la geometria iperbolica viene descritta in modo Sintetico. Si inizia con l'enunciare i teoremi di *geometria Neutrale* ovvero i teoremi Euclidei che restano validi nelle geometrie non-euclidee, cosicché lo studente possa riprendere tali concetti e capire su cosa può continuare a basarsi di quanto conosceva in precedenza.

Successivamente vengono introdotti alcuni concetti e teoremi con dimostrazione che caratterizzano la geometria iperbolica.

Postulato I *Sia P un punto e AB una retta non passante per P (anche se prolungata), allora esistono due rette YPZ e WPX per P, tali che:*

i) YPX non è una singola retta;

ii) YPZ e WPX sono entrambe parallele ad AB;

iii) nessuna delle rette per P interne a $Y\widehat{P}X$ è parallela ad AB (Fig.1).

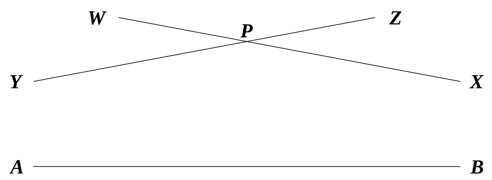


Figura 1: *Ogni retta per P che entra in $Z\widehat{P}X$ è parallela ad AB.*

Teorema H 1. *Nella situazione descritta dal Postulatu I, ogni retta per P che entra in $Z\widehat{P}X$ è parallela ad AB.*

Definizione H 1. Nella situazione descritta dal Postulato I le rette YPZ e WPX sono chiamate **parallele asintotiche** (o **a-parallele**) ad AB per P ed ogni retta per P interna a $Z\widehat{P}X$ è detta **parallela divergente** (o **d-parallela**) per P ad AB.

Teorema H 2. *Le parallele asintotiche ad una data retta passanti per un dato punto formano angoli uguali ed acuti con la perpendicolare alla retta data e passante per il punto.*

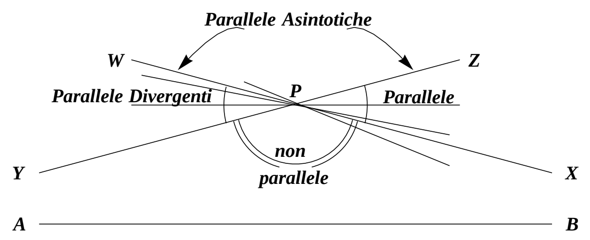


Figura 2: *Parallele ad AB per il punto P.*

Possiamo usare il Teorema H 2 per dare un nome individuale e convenzionale alle due a-parallele: chiameremo WPX, in Figura 1, la a-parallela destra ad AB, perché l'angolo acuto con la perpendicolare PQ è sul lato destro di PQ; allo stesso modo YPZ sarà la a-parallela **sinistra** ad AB. Potremmo anche pensare che ogni a-parallela punti in una direzione particolare, che chiameremo *direzione di parallelismo*: per WPX la direzione di parallelismo è da W a X e per ZPY è da Z a Y; la proprietà di a-parallelismo sarà indicata da una parentesi graffa "{" o "}" ad indicare la direzione di parallelismo (come vedremo in seguito in Fig .3).

Si dimostrano le seguenti proprietà delle parallele iperboliche:

- Una a-parallela in una data direzione (risp. d-parallela) per P ad una retta data è a-parallela nella stessa direzione (risp. d-parallela) alla retta data per ogni suo punto.

- due rette asintoticamente parallele si avvicinano l'una all'altra nella direzione di parallelismo ovvero le perpendicolari condotte da una all'atra si accorciano in quella direzione.

- Se una retta è a-parallela, in una data direzione (risp. d-parallela) ad una seconda retta, allora anche la seconda retta è a- parallela, nella stessa direzione (risp. d-parallela) alla prima retta.

- Se due rette sono a-parallele, nella stessa direzione, alla stessa retta, allora sono anche a-parallele tra loro, in tale direzione.

L'ultima proprietà è l'analogo iperbolico di una proprietà delle rette euclidee: *"Rette parallele alla stessa retta sono parallele tra loro"*. Questo è il Teorema 30 di Euclide, logicamente equivalente al quinto Postulato e quindi falso nel contesto iperbolico: prese comunque due rette per P, che non entrano in $Y\widehat{P}X$, sono entrambe parallele ad AB, ma non sono certamente parallele tra loro poiché si intersecano in P. L' analogo iperbolico è possibile se si specifica che le rette sono a-parallele nella stessa direzione ad AB.

L'introduzione di due differenti tipi di parallele, con proprietà differenti da quelle viste in geometria euclidea, da luogo a nuovi oggetti corredati dalle relative proprietà:

Definizione H 2. Se dalle estremità di un determinato segmento AB, e sullo stesso lato, vengono tracciate due rette asintoticamente parallele tra loro nella direzione in cui ci si allontana dal segmento dato, la figura risultante viene chiamata **biangolo** di base AB.

Se prolunghiamo la base AB ad una retta, il biangolo rappresenta in un certo senso quello che in geometria euclidea abbiamo sempre chiamato "due rette parallele tagliate da una trasversale", solo che in questo caso le due rette sono asintoticamente parallele.

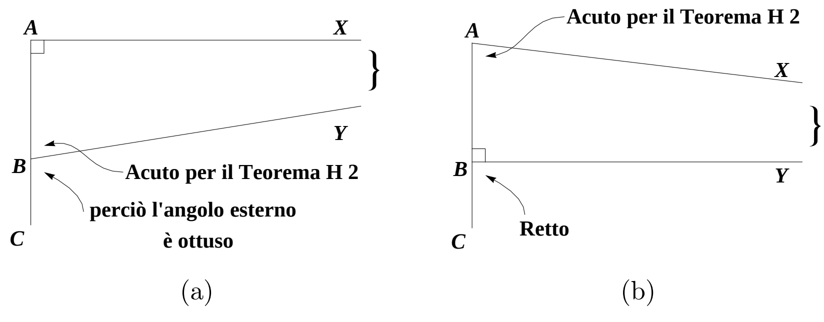


Figura 3: *Angolo esterno ed angolo opposto interno di un biangolo nel caso in cui uno dei due angoli del biangolo sia retto.*

Una proprietà molto importante del biangolo è la seguente:

- Un angolo esterno di un biangolo è maggiore dell'angolo interno opposto.

e per quando detto poc'anzi, e come era lecito aspettarsi, da questa si deduce che il Teorema 29 di Euclide non è valido in geometria iperbolica.

Vengono inoltre dedotti due risultati equivalenti ai criteri di congruenza dei triangoli Euclidei:

Teorema H 10 (AB) *Se i due angoli di un biangolo sono uguali, rispettivamente, ai due angoli di un altro biangolo, allora anche le loro basi sono uguali.*

Teorema H 11 (AA) *Se un angolo e la base di un biangolo sono uguali, rispettivamente, ad un angolo e alla base di un altro biangolo, l'altra coppia di angoli sono tra loro uguali.*

Nel Teorema H 11 si incontra per la prima volta un fatto singolare ovvero il fatto che in geometria iperbolica una lunghezza può essere determinata unicamente mediante angoli.

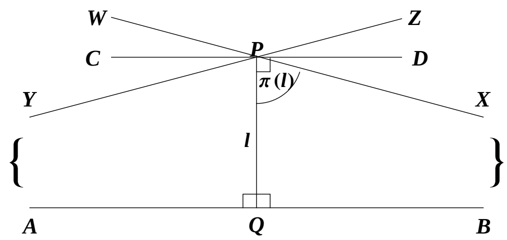


Figura 4: *All'avvicinarsi di P alla retta AB l'angolo di parallelismo $\pi(l)$ tende ad un angolo retto.*

Viene definito l'**angolo di parallelismo** come il minimo angolo che una retta passante per un punto P, ed asintoticamente parallela ad una retta data AB, forma con la normale ad AB per P. Questo angolo viene denotato con $\pi(l)$, dove l rappresenta la lunghezza del segmento PQ in Figura 4 e, per quanto visto nel Teorema H 11, vi è una corrispondenza biunivoca tra le distanze l ed i corrispondenti angoli $\pi(l)$.

Nella seconda parte di questo capitolo si vedono in dettaglio le peculiarità ed il giusto approccio alla geometria iperbolica. Un risultato importante è il seguente:

Teorema H 15 (AAA) Se tre angoli di un triangolo sono uguali rispettivamente a tre angoli di un altro triangolo, allora i triangoli sono congruenti.

La dimostrazione del Teorema H 15 è interessante infatti è effettuata per assurdo e verifica che se esistessero due triangoli simili non congruenti varrebbe il V Postulato di Euclide. Perciò in geometria iperbolica sono impossibili modelli in scala perfetti.

Dopo aver dimostrato che la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di 180°, viene definito il **difetto di una triangolo** come la quantità che manca alla somma dei suoi angoli interni per raggiungere 180°. Essendo una proprietà additiva si deduce che l'area di un triangolo è direttamente proporzionale al suo difetto angolare e da questo è possibile dedurre un'interessante generalizzazione del Teorema H 15: *"Se la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale alla somma degli angoli interni di un altro triangolo, allora i triangoli hanno la stessa area"*; affinché i triangoli abbiano la stessa area non si richiede più che gli angoli siano uguali a due a due ma solo che la loro somma sia uguale; ciò non significa che siano triangoli congruenti.

Infine vi è un **limite superiore per le aree dei triangoli**. Per quanto grande possa essere un triangolo la sua area sarà sempre inferiore a $k \cdot 180°$ dove k è un valore al variare del quale si generano infinite geometrie iperboliche diverse.

Il secondo capito si conclude con una serie di problemi di geometria sintetica affinché lo studente possa verificare le conoscenze acquisite ed esercitare il ragionamento logico-deduttivo.

Nel **terzo capitolo** vengono trattati i modelli del piano iperbolico approfondendo quindi lo studio da un punto di vista analitico. Il problema della consistenza della geometria iperbolica è qui ridotto alla consistenza della geometria euclidea. Ci sono quattro rappresentazioni comunemente utilizzate per il piano iperbolico che definiscono un vero e proprio spazio che soddisfa gli assiomi della geometria iperbolica: il modello Klein, il modello del disco di Poincaré, il modello del semipiano di Poincaré ed il modello di Lorentz.

Il modello di Klein ed i modelli di Poincaré sono tra le rappresentazioni considerate preferibili per introdurre la geometria iperbolica. La scelta di inserire i modelli di Poincaré, piuttosto che di quello di Klein, è motivata dal fatto che, mentre la costruzione del modello Klein richiede concetti e risultati di geometria proiettiva, i modelli di Poincaré utilizzano trasformazioni elementari, come la simmetria assiale e l'inversione circolare, che sono più intuitive per uno studente di scuola superiore.

Finora i disegni sono stati fuorvianti ed è quindi necessario rivedere il modo di disegnare una retta. Per poter visualizzare la possibilità della validità Postulato I, bisogna modificare essenzialmente la forma di una retta.

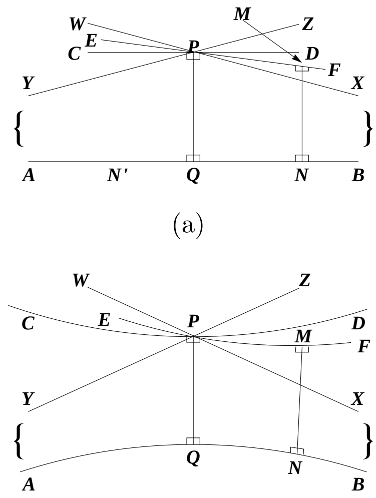
La definizione che Euclide da di retta

IV. Una retta è una linea che giace ugualmente rispetto ai suoi punti.

non impone che questa venga necessariamente disegnata dritta ma solo che essa sia priva di alcuno spessore e che abbia una sola dimensione: la lunghezza. Disegnando una retta come una linea, quindi priva di spessore, ma curva, si può effettivamente prendere in considerazione il Postulato Iperbolico (Fig. 5(b).

Il terzo capitolo si chiude con una serie di esercizi svolti in cui vengono trattati i seguenti temi:

- la determinazione di una retta iperbolica per due punti,



(a)

(b)

Figura 5: *Con la vecchia rappresentazione (a) le proprietà delle parallele, degli angoli e delle lunghezze non sono chiaramente visibili come nella nuova (b).*

- la stima del difetto di un triangolo,
- la relazione tra l'angolo di parallelismo $\pi(l)$ e la distanza l,
- la determinazione della perpendicolare comune tra due rette,
- ricerca di alcune proprietà del fascio di rette iperboliche.

Il **quarto ed ultimo capitolo** è rivolto agli insegnanti. In questa sezione, si danno degli esempi che mostrano come gli insegnanti di matematica possono avviare gli studenti al problem solving mediante l'utilizzo del software *GeoGebra* .

Questo programa dispone di un serie di strumenti sulle trasformazioni geometriche molto ricco e offre la possibilità di includere l'insegnamento di queste in modo dinamico e interattivo. In particolare è da notare che fra le trasformazioni del menu c'è anche **l'inversione circolare** che, dal punto di vista educativo, è opportuno presentare prima dello studio dei modelli di Poincaré poiché è utile per la costruzione delle rette iperboliche.

Viene introdotto anche il **birapporto** e dimostrata la sua invarianza rispetto all'inversione circolare. Il birapporto è alla base del calcolo della distanza iperbolica e utilizzando l'invarianza appena menzionata si può calcolare la distanza tra due punti iperbolici in modo più diretto facendo allo stesso tempo un esercizio più completo.

Per entrambi gli argomenti vengono forniti degli esercizi svolti che possono essere approfonditi con l'utilizzo di software dinamici.

Il capitolo termina con delle Schede didattiche per proporre un piano di apprendimento della geometria iperbolica con il supporto di GeoGebra.

Bibliografia

[1] Bonola Roberto. *Non-Euclidean geometry.*
Dover Publications, Inc.

[2] Maria Dedò, *Trasformazioni geometriche con un'introduzione al modello di Poincaré.*
Zanichelli-Decibel, Padova 1996.

[3] Marvin J. Greenberg, *Euclidean and non-Euclidea Geometries. Development and history.*
W. H. Freeman and Company, 2008.

[4] G. Margiotta, *Introduzione alla geometria non euclidea con CABRI, Quaderno 10 di CABRIRRSAE.*
Bologna, 1996.

[5] J. H. Poincaré, *La scienza e l'ipotesi.*
Bonpiani, 2003.

[6] D. M. Y. Sommerville, *The Elements of non-Euclidean geometry.*
Dover Publications, Inc. 2005.

[7] Richard Trudeau, *La rivoluzione non euclidea.*
Bollati Boringhieri, 2004.